

# Физико-математические науки

УДК 524.8

© 2011 Д.Б. Волов

## ОБОБЩЕННАЯ ДИНАМИКА ФЕРХЮЛЬСТА-РИКЕРА-ПЛАНКА И ЕЕ СВЯЗЬ С ПОСТОЯННОЙ ТОНКОЙ СТРУКТУРЫ

Вводится в рассмотрение динамика, обобщающая динамики Ферхюльста, Рикера на статистики бозонов и фермионов. Для рассмотренной в работе обратной отрицательной динамики установлена ее связь с постоянной тонкой структуры, выявлен смысл постоянной в этом отображении. Для комплексных рекурсивных аналогов построены обобщенные двухпараметрические множества Жюлиа и Мандельброта и представлена возможность расширения данных понятий на множестве кватернионов, октонионов и септенионов в битриальной математике.

*Ключевые слова:* логистическое отображение, статистика бозонов, фермионов, битрон, постоянная тонкой структуры, бифуркационная диаграмма, фрактал, битриальная математика, Масштабная теория.

При моделировании различных процессов динамики популяций в биологических системах используются различные одномерные отображения, среди которых одной из наиболее ранних считается дискретная модель Ферхюльста-Пирла [1]:

$$x_{n+1} \rightarrow rx_n(1 - x_n), \quad (1)$$

где  $x_n$  – значение относительной численности в дискретный момент времени  $n$ ,  $r$  – параметр, выражающий скорость роста популяции. Замена переменных  $x = (y + 1/2)/(r/4 + 1/2)$ ,  $\lambda = r(r/4 - 1/2)$  [1] переводит (1) в логистическое отображение:

$$y_{n+1} \rightarrow 1 - \lambda y_n^2. \quad (2)$$

При некоторых начальных условиях и величинах параметров упомянутые отображения дают отрицательные значения численности популяции. Однако при  $r < 4$  и при  $x_0 < 1$  модель (1) оказывается корректной [2]. Подобных ограничений лишена дискретная модель Рикера [3]:

$$x_{n+1} \rightarrow rx_n \exp(-x_n), \quad (3)$$

при малых  $x_n$  переходящая в (1) при разложении экспоненты в ряд Тейлора. Модель (3) нашла широкое применение в биологии и экономике. Существуют ее модификации с показателем степени  $\Phi$  при  $x_n$ , отличным от единицы [4].

В биологических системах, как правило, нет необходимости в привлечении гипотезы о тождественной неразличимости частиц. Опосредованно во всех моделях частицы, входящие в систему, различимы, чему соответствует распределение Максвелла – Больцмана в статистической физике. В противоположность этому, в квантовой физике частицы считаются тождественно неразличимыми, и при моделировании квантовыми эффектами пренебрегать уже нельзя [5], так что статистика подразделяется на статистики Бозе – Эйнштейна и Ферми – Дирака с единицей в знаменателе:

$$n_i = \frac{g_i}{\exp\left(\frac{\varepsilon_i - \mu}{kT}\right) \pm 1}, \quad (4)$$

где  $n_i$  – среднее число частиц в состоянии  $i$ ;  $\varepsilon_i$  – энергия состояния  $i$ ;  $g_i$  – кратность вырождения;  $\mu$  – химический потенциал;  $k$  – постоянная Больцмана;  $T$  – температура;  $+1$  относится к фермионам;  $-1$  – к бозонам.

Статистика (3) дает однозначное параметрическое соответствие химического потенциала  $\mu$  и постоянной Планка (через элементарный фазовый объем  $a$ ) [6, с. 151, 159]: при переходе

к интегрированию химический потенциал оказывается связанным с фазовым объемом одной ячейки  $a$ , так что произвол в выборе  $a$  исчезает и он становится равным кубу от постоянной Планка. В однозначности выбора элементарного фазового объема важное отличие (4) от статистики Максвелла – Больцмана [6].

В еще более общем случае [7], [8] слагаемое в знаменателе (4) может быть и не равным единице, в то время как показатель степени принимает вещественные значения  $\Phi$ .

Учитывая сказанное, запишем обобщенную рекурсивную формулу для хаотической динамики:

$$x_{n+1} \rightarrow \frac{rx_n^\Phi}{\exp(x_n) + \alpha}, \quad (5)$$

где  $\alpha$  – действительное число, и назовем ее одномерной обобщенной динамикой Ферхюльста – Рикера – Планка (ФРП). Формула (5) при  $\alpha = 0$ ,  $\Phi = 1$  переходит в модель Рикера (3), которая в свою очередь при малых  $x_n$  переходит в (1).

Данная динамика обладает рядом замечательных свойств. Например, при  $\Phi = 1$ ,  $\alpha = -1$  правая ее часть соответствует средней энергии фотонов как бозонов в модели абсолютно черного тела:

$$\langle \varepsilon \rangle = \frac{\hbar \omega}{\exp(\hbar \omega / kT) - 1} = \frac{rx}{\exp(x) - 1}, \quad r = kT,$$

и позволяет по-другому взглянуть на проблему корпускулярно-волнового дуализма. Конкретно для  $\Phi = 1$  при стремлении параметра к  $-1$  справа ( $\alpha \rightarrow -1+0$ ) динамика обедняется, так что после единственной бифуркации на  $r > 3$  выстраиваются две ветви (рис. 1,  $a$ ,  $b$ ,  $c$ ). При  $\alpha \equiv 1$  динамика полностью «очищается»: теряет хаотическую составляющую, осциллируя между двумя значениями.

Чтобы продолжать пользоваться общепринятыми терминами и формулировками, имеет смысл оставить единицу в знаменателе (5), получая динамику бозонов ( $-1$ ) или фермионов ( $+1$ ), а общность формулы (5) сохранять выделением «химического потенциала»  $\mu$  в экспоненте:  $\exp(x) \pm \alpha = \alpha(\exp(x - \ln(\alpha)) \pm 1)$ ,  $\ln(\alpha) = \mu / kT$ , рассматривая в физических приложениях фазовые переходы первого и второго рода.

При  $\Phi_r = 2,6327483384777\dots$  мажоранта аттракторов динамики (5) в точности равна числу  $r$ :  $\sup(\bar{x} | \Phi_r) \equiv r$ . Данная бифуркационная диаграмма представлена на рис. 2,  $a$ . По оси абсцисс отложены значения параметра  $r$ , а по оси ординат – значения  $x_n$ , принимаемые  $x$  на  $n \gg 1$ , ( $\alpha = -1$ ). На рис 2,  $b$  показана лестница Ламерея притягивающего 3-цикла при  $r = 8,23$ , а на рис. 2,  $c$  выход на режим, при котором наблюдаются колебания между этими тремя значениями. Далее при увеличении  $r$  последовательность смены количества значений удовлетворяет порядку Шарковского. Структура бифуркационной диаграммы (рис. 2) самоподобна и является типичным примером хаотического поведения. Данное значение  $\Phi_r$  возникает, если потребовать, чтобы при  $\alpha = -1$  правая часть рекурсивной формулы (5) без  $r$  достигала максимума в единице, что эквивалентно следующей системе трансцендентных уравнений:

$$\begin{cases} x / \Phi = 1 - e^{-x} \\ x^\Phi = e^x - 1 \end{cases},$$

решение которой и дает  $\Phi_r = 2,6327483384777\dots$  при  $x = 2,39199004\dots$

В области отрицательных целых значений  $\Phi$  существует единственная хаотическая динамика при  $\Phi = -2$ , которая вдобавок является еще и отрицательной:

$$x_{n+1} \rightarrow \frac{-(r/x_n^2)}{\exp(x_n) + \alpha}. \quad (6)$$

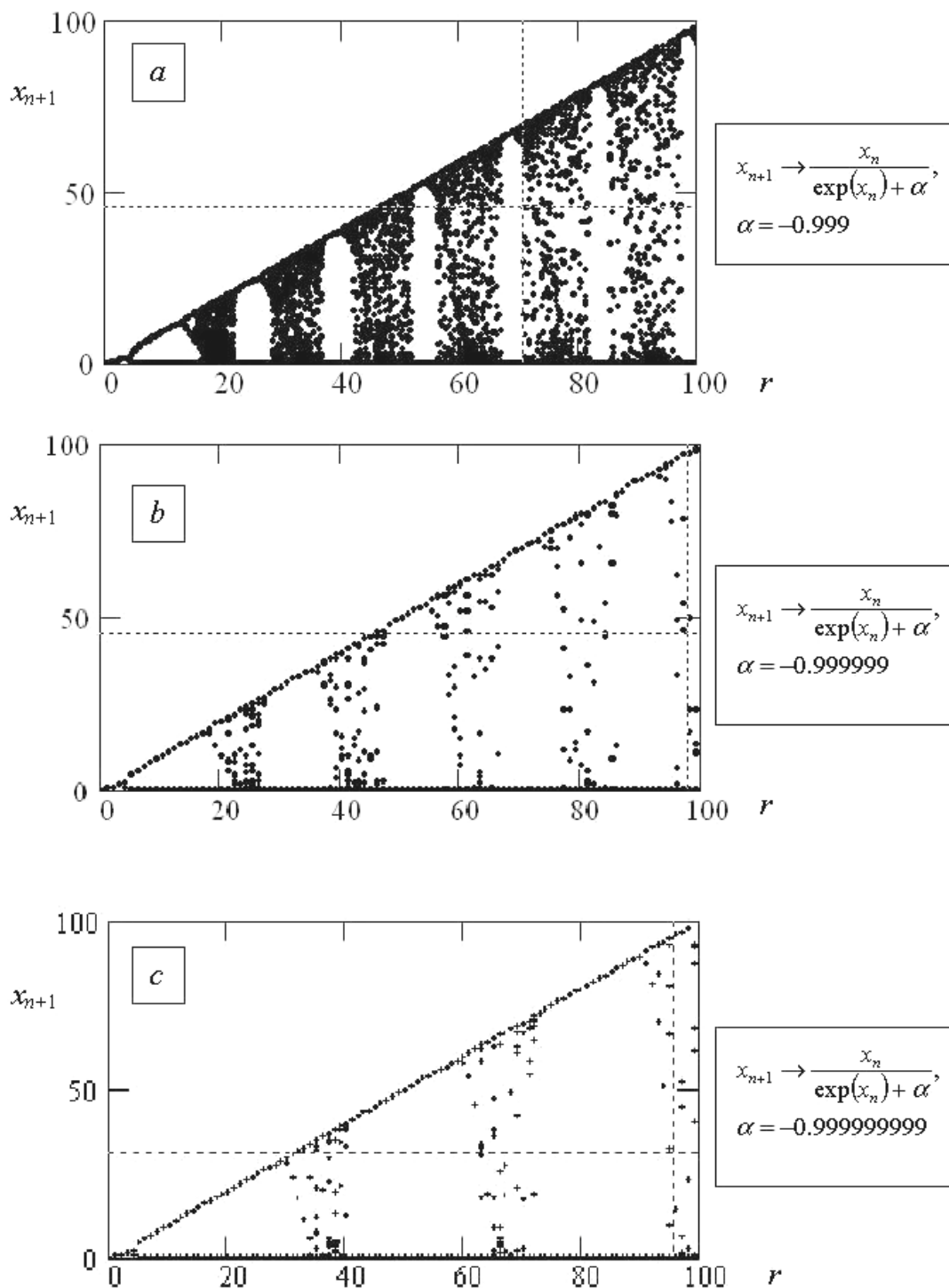


Рис. 1. «Очищение» динамики бозонов при  $\alpha \rightarrow -1$

Надо отметить, что имеется обратная динамика при  $\Phi = -1$ , но она не является хаотической. Кроме того, в области вещественных  $\Phi$  существует семейство обратных ФРП-динамик в узкой окрестности  $\Phi = -2$ . Они отличаются от целочисленной динамики  $\Phi = -2$  тем, что процесс бифуркаций в них проходит через хаотическую предфазу (рис. 3). У обратной ФРП<sup>2</sup> динамики (б) существует аналог в области положительных  $x$ :

$$x_{n+1} \rightarrow \frac{(r/x_n^2)}{\exp(-x_n) + \alpha}.$$

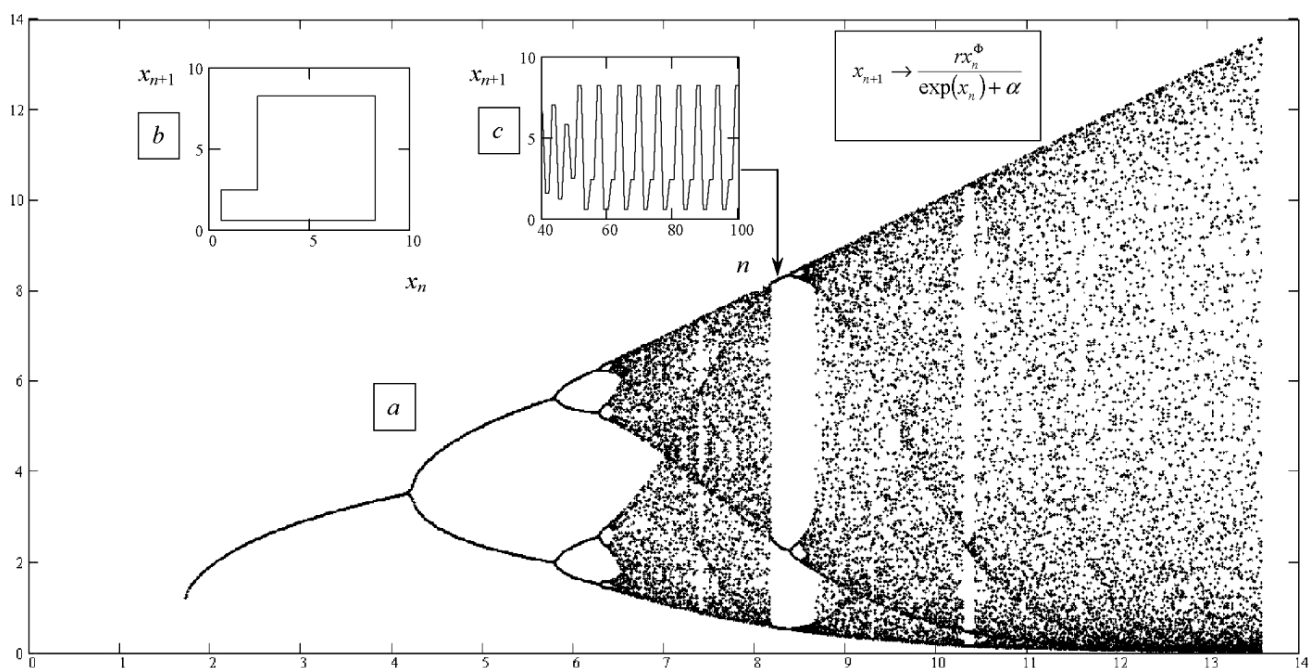


Рис. 2. *a* – диаграмма ФРП при  $\Phi = \Phi_r$ ,  $\alpha = -1$ ; *b* – пример притягивающего цикла; *c* – его развертка

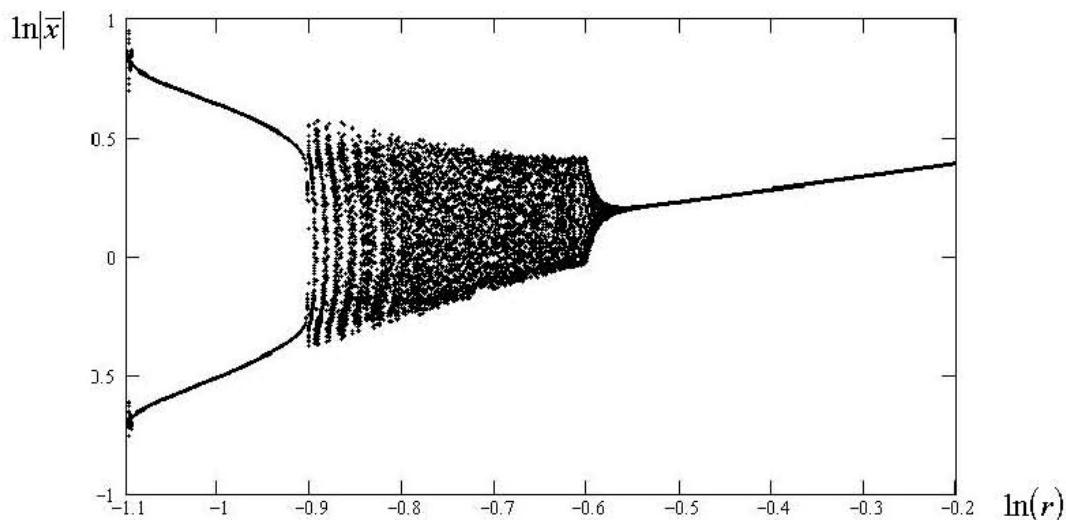


Рис. 3. Пример хаотической бифуркационной предфазы в обратной динамике  $\Phi = -2,13$ ,  $\alpha = 1/337$

В самом деле, при моделировании численности особей, плотности вероятности и т.п. было бы странным оперировать отрицательными их значениями. Об обратной ФРП-динамике вообще вряд ли бы стоило упоминать, если не ряд особенностей ее поведения, связанный с фундаментальными константами в физике. Как исключение, сугубо отрицательные значения  $x$  интересны для интенсивно разрабатываемой сейчас Масштабной теории объединения, где отрицательная плотность вероятности, «численности популяции» трактуются как отсутствие спейсона или хронона в данном месте пространства, то есть характеризуются присутствием материальной частицы [7].

ФРП<sup>2</sup> динамика имеет место на  $\alpha \in \sim[-0,43, +0,106]$ ,  $r \in \sim[e^{-4}, e^{+8}]$  и дает значения  $|x|$  в диапазоне  $\sim e^{19,5}$ . Ее поведение во многом схоже с известными дискретными отображениями, с характерными каскадами бифуркаций удвоения периода, окнами периодичности и т.п.

Самое главное, что при значении  $\alpha$ , приближающимся к постоянной тонкой структуры слева, хаотическая динамика обедняется, и при  $\alpha = 1/137035999074$  появляется картина, изображенная на рис. 4. При этом значении параметра  $\alpha$  вся хаотическая динамика оказывается скрытой в «ушках» (рис. 4). Чтобы подробнее рассмотреть «левые крыски» (ветвь слева, при малых  $r$ ), удобнее строить динамику в логарифмических координатах (рис. 5, кадр 4).

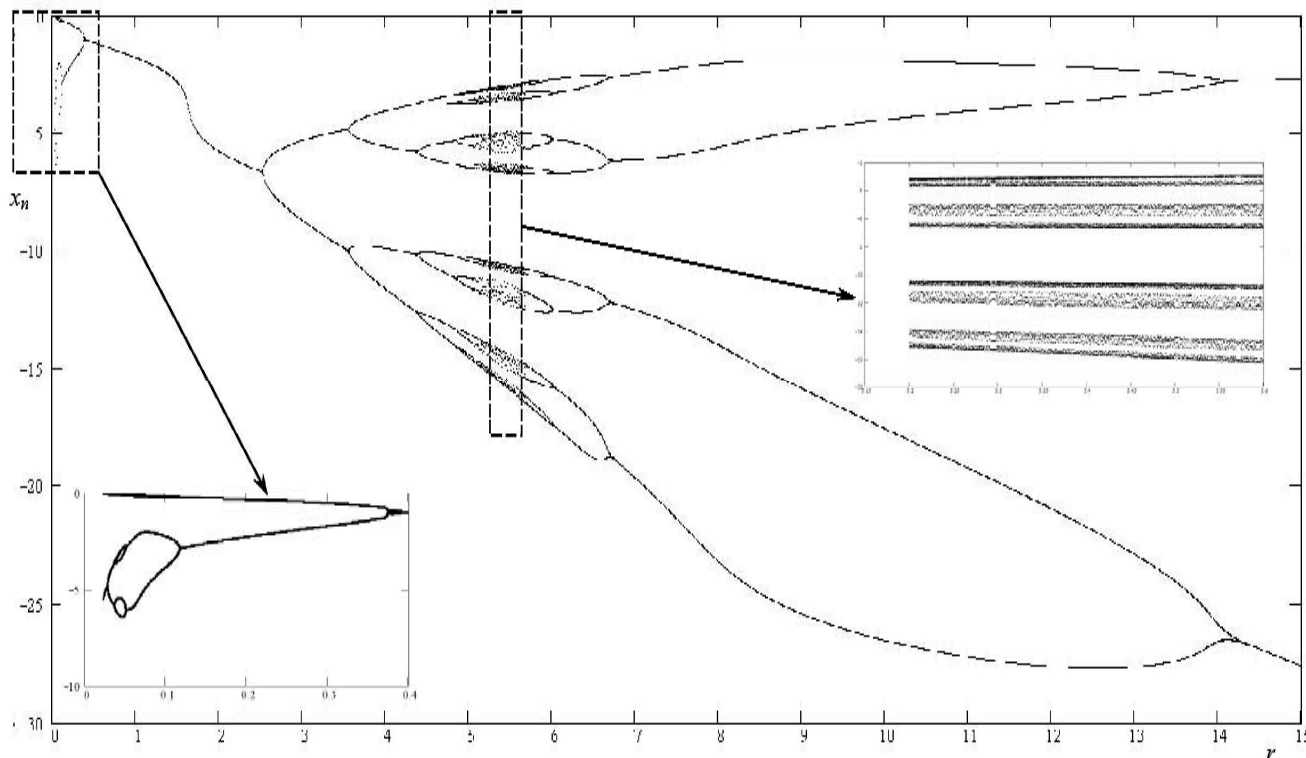


Рис. 4. Бифуркационная диаграмма «четыре крыски». Динамика  $x_{n+1} \rightarrow \frac{-(r/x_n^2)}{\exp(x_n) + \alpha}$ ,  $\alpha = 1/137035999074$

При больших положительных значениях  $\alpha$  хаоса нет. Вначале зарождается «трещина», претерпевающая ряд бифуркаций в обоих направлениях, затем линии внутренне раздваиваются (рис. 5, кадры 1–3). Предхаотичная динамика наиболее богата при уже упомянутом  $\alpha = +1/137...$  При меньших положительных  $\alpha$  развивается хаотическая динамика, зоны пересекаются, создавая характерные картины бифуркаций (рис. 5, кадры 5–7). Окна периодичности при приближении  $\alpha$  к 0 справа расширяются, и при  $\alpha = 0$  динамика утрачивает правую ветвь (рис. 5, кадр 8). При  $\alpha < 0$  левая ветвь, сохраняя хаотическую составляющую, постепенно сжимается, демонстрируя значительно большую стабильность (по сравнению с правой) при дальнейшем снижении  $\alpha$  (рис. 5, кадры 8–10).

Таким образом, в ФРП<sup>-2</sup> динамике при приближении значения параметра  $\alpha$  к постоянной тонкой структуры динамика обладает наибольшим многообразием в смысле количества бифуркаций и наименьшей степенью хаотичности.

Отношение расстояний между точками бифуркаций в логарифмических координатах (рис. 6) как по горизонтали, так и по вертикали равно двум:  $x_1/x_2 = x_3/x_4 = r_1/r_2 = 2$ . Величина  $a/b$  отношения зазора в начале бифуркаций к зазору в ее конце, возможно, равна  $\pi/4$ . Отрицательная ФРП<sup>-2</sup> динамика связана с понятием обобщенной силы в Масштабной теории объединения.

Замена переменных  $x \leftarrow x/s$  не приводит к новым динамикам, а лишь представляет ФРП<sup>-2</sup> динамику в относительных единицах:

$$\bar{x}_2(r_2, s_2, \alpha) \equiv \frac{s_2}{s_1} \cdot \bar{x}_1 \left( r_2 \cdot \left( \frac{s_1}{s_2} \right)^3, s_1, \alpha \right).$$

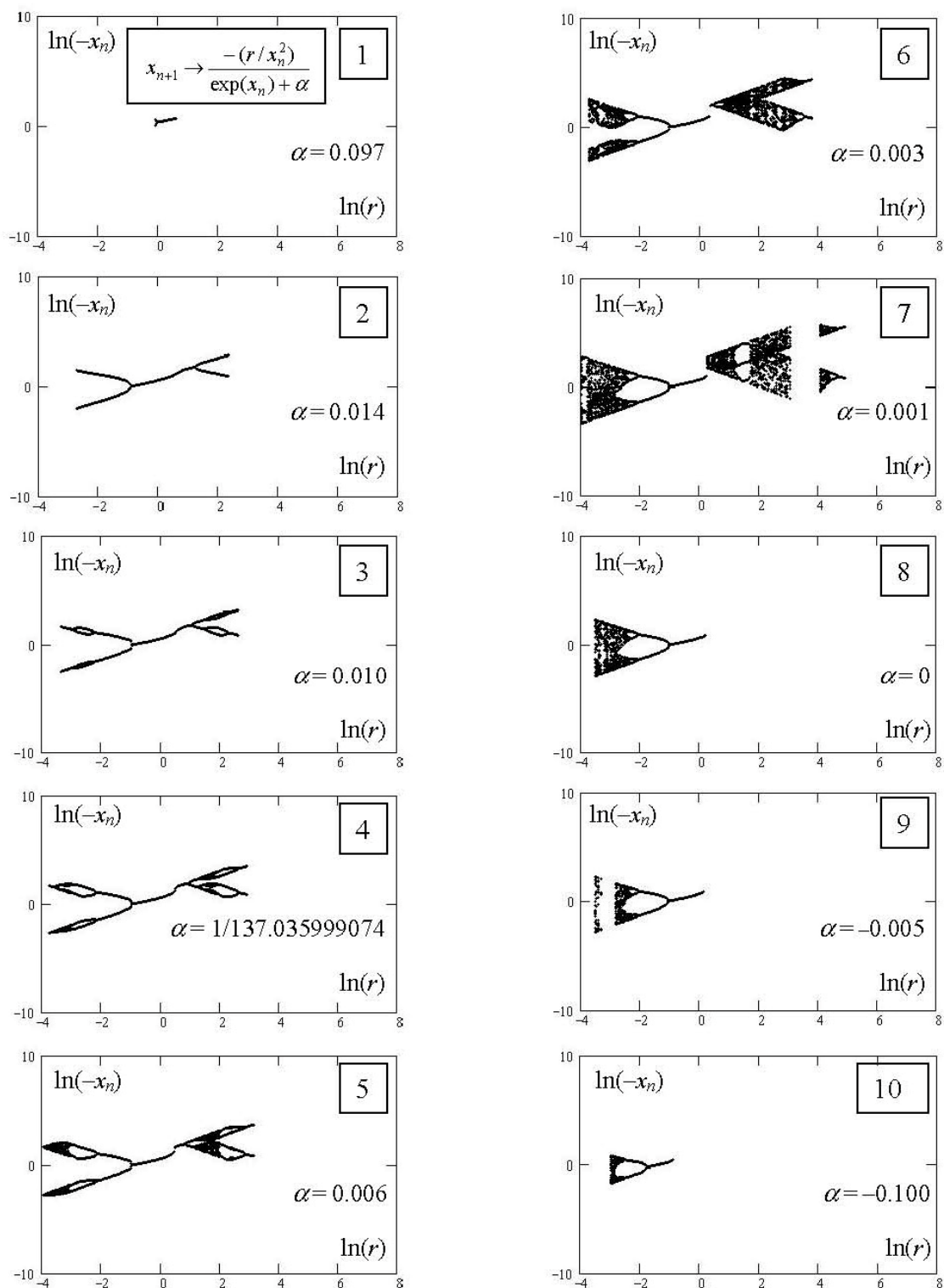


Рис. 5. ФРП<sup>2</sup> динамика

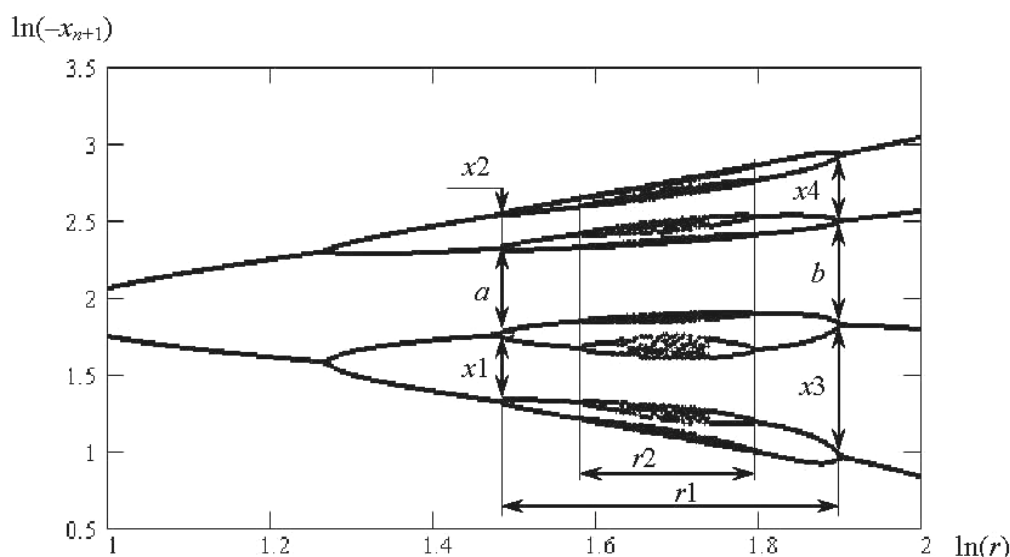


Рис. 6. Баланс бифуркационных плеч обратной динамики

Физический смысл ФРП<sup>2</sup> динамики становится ясен, если перевернуть ее на  $\pi/2$  и рассмотреть зеркальное изображение.

Как логистическому отображению (2) в комплексных числах можно сопоставить множество Жюлиа отображения  $z \rightarrow z^2 + c$ , так одномерной ФРП динамике при комплексных параметрах сопоставляются обобщенные множества Жюлиа. Аналогично обычным правилам строится и множество Мандельброта.

На комплексной плоскости обратная ФРП<sup>2</sup> динамика

$$z_{n+1} \rightarrow \frac{-(c_{ij} / z_n^2)}{\exp(z_n) + \alpha_{ij}} \quad (7)$$

дает обобщенные множества Жюлиа, зависящие уже не от одного комплексного параметра  $c_{ij}$ , а еще и от комплексного  $\alpha_{ij}$ . Обобщенное множество Мандельброта строится для  $z_{ij} \leftarrow 1$ .

На рис. 7, a изображено множество Жюлиа при действительных  $\alpha = 1/137\dots$  и  $c = e = 2,71828\dots$ , на рис. 7, b – его левая нижняя четверть. Очевидна горизонтальная ось симметрии, относительно которой можно вращать этот фрактальный объект. Если в  $\alpha$  и  $c$  присутствуют отличные от нуля комплексные составляющие, то они «доворачивают» объект, деформируя его ось вращения в гиперболу и «нарушая» симметрию. При некоторых значениях параметров возникают хорошо известные фракталы. Так, при  $c \approx 0,1$ ,  $\alpha \approx 0,02$  в центре обобщенного множества Жюлиа (7) возникает простое множество Мандельброта отображения  $z \rightarrow z^2 + c$ .

Поскольку  $\alpha$  в (7) комплексное, в четырехмерном пространстве  $R^3-t$  мы можем представить лишь переменные во времени «срезы» этого математического объекта. С примерами таких препаратов «живого» множества Жюлиа можно ознакомиться в видеофильмах на сайте [www.volovdm1.narod2.ru](http://www.volovdm1.narod2.ru). Полное множество Мандельброта для этого объекта уже для комплексных чисел непредставимо в  $R^3-t$ . Задача решается в битриальной математике, где каждой «точке» множества Мандельброта (точка в битриальной логике [9] заменяется битроном [7], ноль отсутствует) сопоставляется множество Жюлиа на битриальной сфере [10].

Дело в том, что в битриальной математике каждое действительное число, образно говоря, имеет «почти» нулевую комплексную часть, а комплексное соответственно – «почти» нулевую часть кватерниона, которая аналогичным образом расширяется до октониона с алгеброй Кэли, и, наконец, – до седениона, утрачивая альтернативность и сохраняя степенную ассоциативность. Поэтому соответствующие множества Жюлиа и Мандельброта естественным образом возникают в битриальном пространстве в гиперкомплексных числах. Однако рассмотрение данного вопроса выходит за рамки настоящей статьи.

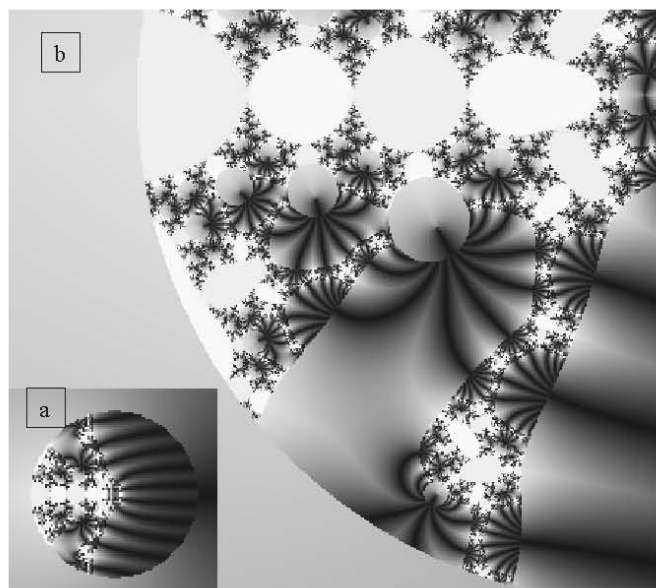


Рис. 7. Обобщенное множество Жюлиа для обратной динамики (7),  $c = e$ ,  $\alpha = 1/137$

Главный результат, полученный в данной работе, заключается в следующем: для обобщенной динамики Ферхюльста-Рикера-Планка обнаружено, что существуют два предельных значения безразмерного параметра:  $-1$  для системы бозонов и  $+1/137\dots$  для системы фермионов. При приближении к первому значению динамика бозонов обедняется и вырождается в две линии, а при приближении ко второму динамика фермионов обладает максимальным многообразием при минимальной степени хаоса.

Работа подготовлена в рамках Масштабной теории.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- 1 Думачев В.Н., Родин В.А. Эволюция антагонистически взаимодействующих популяций на базе двумерной модели Ферхюльста-Пирла. Матем. моделирование. 17:7 (2005). С. 11–22.
- 2 Герасин С.Н., Козлов М.А. Оценка параметров численности популяции в дискретной модели Рикера // Бионика интеллекта. 2008. № 2 (69). С. 159–163.
- 3 Рикер У.Е. Методы оценки и интерпретация биологических показателей популяций рыб. М.: Пищевая промышленность, 1979. 408 с.
- 4 Ризниченко Г.Ю., Рубин А.Б. Математические модели биологических продукционных процессов. М.: МГУ, 1993. 302 с.
- 5 Боголюбов Н.Н., Широков Д.В. Введение в теорию квантовых полей. 4-е изд., испр. М: Наука. Главная редакция физико-математической литературы. 1984. 600 с.
- 6 Румер Ю.Б., Рывкин М.Ш. Термодинамика. Статистическая физика и кинетика. М.: Наука, 1972. 400 с.
- 7 Волов Д.Б. Битрон. Фибриал, битриал, скейлон и пять главных императивов. Октавиан // Вестник СамГУПС. 2011. № 2(24). С. 170.
- 8 Волов Д.Б. Введение понятия абсолютной энтропии // Обзорение прикладной и промышленной математики, 2011. Т.18. В.2. С.106–107.
- 9 Волов Д.Б. Формализм битриальной логики / Современные методы теории краевых задач / Материалы Воронежской весенней математической школы «Понтрягинские чтения –XV». Воронеж, ВГУ, 2011. С. 43.
- 10 Волов Дм. Основы битриальной математики // Вестник СамГУПС. 2011. № 1(23). С. 165.

Статья поступила в редакцию 20.09.2011 г.

Рекомендована к опубликованию членом редакционной коллегии д.т.н., профессором Копейкиным С.В.